

Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства

Два метрич. пр-ва наз-ся **изометрическими**, если между ними есть взаимно-однознач. соотв-е сохраняющее расстояние

Л (Хаусдорфа о пополнении метрич. пр-ва)
 M — метрич. пр-во. Тогда $\exists!$ (с точностью до изометрии) полное метрич. пр-во $\tilde{M}$:

- 1) $M \sim M_0$, $M_0 \subseteq \tilde{M}$ ($\sim$ — изометрия);
- 2) Замыкание M_0 дает $\tilde{M}$: $M_0 = \tilde{M}$

ИР-м функ. п-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$; Будем говорить, что функ. п-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентны, если $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 Попробуем для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ через x_n -класс экв. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ функ. п-ти. $x \in \tilde{M}$. $d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ ($x_n \in X, y_n \in Y$, произвольные) П-и, что предел существует и не зависит от выбора $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

- 1) Существование. $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$; $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$; правая часть стремится к 0 в силу фундаментальности. Меняя m и n местами, получаем, что $d(x_n, y_n)$ фундаментальна. $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$
- 2) Независимость. Пусть $\{x'_n\} \in X$, $\{y'_n\} \in Y$. $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$, $d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n)$. Поменяв местами x и x' , то $|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$ не зависит.)

Проверим те теперь аксиомы метрики: $d(x, y) \geq 0$

(свойство), $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (послед экв-ции);

$d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (свойство)

II. Построим M_0 . $M_0 = \{Y: \{y, y, y, \dots\} \in Y\}$. Рассмотрим соответствие $y \leftrightarrow Y$. Покажем, что $\bar{M}_0 = \tilde{M}$, т.е. что $\forall X \in \tilde{M} \forall \varepsilon > 0 \exists Y \in M_0: d(X, Y) < \varepsilon$. В X есть $\{x_1\}_{n=1}^{\infty}$; $Y_n \ni \{x_n, \dots, x_n, \dots\}$. Покажем, что Y_n приближается к X сколь угодно точно: $d(X, Y_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, y_n) < \varepsilon$ при $n >$ некоего N . (ибо $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0$) $\Rightarrow \bar{M}_0 = \tilde{M}$. ~~У.Т.Д.~~

III. Покажем, что $\tilde{M}$ полно. Р-и дидактическую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Из предыдущего, $\exists Y_n \in M_0$ $d(x_n, Y_n) \leq \frac{1}{n}$. В Y_n есть n -то $\{x_1, \dots, x_n\}$. Рассмотрим $X \ni \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ (кандидат на роль предела). П-и, что $\{x_1, \dots, x_n\}$ дидактична. $d(x_n, x_m) = d(Y_n, Y_m) \leq d(Y_n, X_n) + d(X_n, X_m) + d(X_m, Y_m) \leq \frac{1}{n} + d(X_n, X_m) + \frac{1}{m} \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$. Итак, класс X существует, г-и, что он предел. $d(X, X_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) < \varepsilon$ при дост. большом $m > N$.

IV. Про единственность. Пусть $M \sim M_0 \in \tilde{M}$, $M \sim M'_0 \in \tilde{M}'$. Но тогда $M_0 \sim M'_0$, но $\bar{M}_0 = \tilde{M}$, $\bar{M}'_0 = \tilde{M}' \Rightarrow \tilde{M} \sim \tilde{M}'$. Ч.Т.Д. ■